

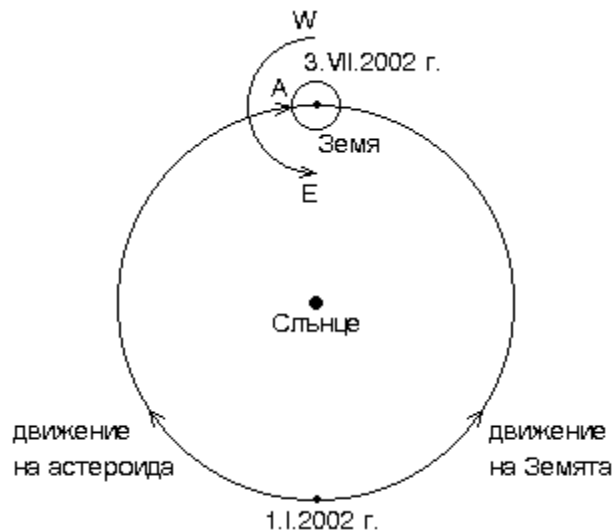
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Централна комисия за провеждане на олимпиадата по АСТРОНОМИЯ

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ

от II кръг на IV национална олимпиада по астрономия, 11 януари 2001 г.

УЧЕНИЦИ VII ÷ VIII КЛАС

Задача 1. Астероидът минава покрай Земята в момент, когато тя е близо до перихелия на своята орбита. По-нататък астероидът и Земята се движат по двете симетрични части на земната орбита. Съгласно II закон на Кеплер, двете тела се движат с променлива по големина скорост, но във всеки момент скоростта на астероида е равна на скоростта на Земята и всеки от двата обекта изминава до срещата половината от орбитата.



Срещата им се осъществява в диаметрално противоположната точка на земната орбита – афелия, след половин година, което е равно на:

$$365.25 / 2 = 182^{\text{d}}15^{\text{h}}$$

Към момента на първото сближаване (1 януари 17^h00) прибавяме този период от време и получаваме:

$$\begin{aligned} & 1 \text{ януари } 17^{\text{h}} + 182^{\text{d}}15^{\text{h}} = \\ & = 1 \text{ януари } 17^{\text{h}} + 30^{\text{d}} (\text{януари}) + 28^{\text{d}} (\text{февруари}) + 31^{\text{d}} (\text{март}) + 30^{\text{d}} (\text{април}) + 31^{\text{d}} (\text{май}) + 30^{\text{d}} (\text{юни}) + 2^{\text{d}} \\ & \quad (\text{от юли}) + 15^{\text{h}} \end{aligned}$$

Следователно сблъскването ще стане в момента:

$$2 \text{ юли } 17^{\text{h}} + 15^{\text{h}} = 3 \text{ юли } 08^{\text{h}} \text{ Гриничко време} \quad (1)$$

Посоката на въртене на Земята съвпада с посоката на орбиталното ѝ движение около Слънцето. Сблъскването с астероида ще стане в точка А. Тя ще е близо до екватора, понеже преминаването на Земята през перихелия става малко след момента на лятно слънцестоене. Както се вижда от чертежа, местното време в тази точка ще е около 6^h. От (1) виждаме, че за Гриничкия меридиан времето ще е 8^h. Следователно точката на сблъскването ще е на 2^h западно от този меридиан по географска дължина. Това означава, че астероидът ще падне някъде в Атлантическия океан, недалеч от екватора.

Задача 2. При $w = v$ самолетът, който лети на изток, ще се движи относно центъра на Земята със скорост $u_E = w + v = 2v$. Периодът, през който за него ще се сменят денят и нощта, ще бъде $T_E = 24^{\text{h}} / 2 = 12^{\text{h}}$. Самолетът, който лети на запад, ще се движи относно центъра на Земята със скорост $u_W = w - v = 0$. Следователно за него няма да има смяна на ден и нощ.

При $w = 2v$ за самолета, който се движи на изток, получаваме $u_E = w + v = 3v$ и $T_E = 24^{\text{h}} / 3 = 8^{\text{h}}$. За самолета, който се движи на запад, $u_W = w - 2v = -v$. Знакът минус означава, че за

него Слънцето ще се движи видимо по небето не от изток на запад, а от запад на изток. Периодът на смяна на деня и нощта ще е $T_W = 24^h$.

По-точно решение (незадължително – за присъждане на допълнителни точки награда): При горните разглеждания беше пренебрегнат фактът, че ако v е скоростта на точките от земната повърхност относно центъра на Земята, периодът им на пълно завъртане около този център е не 24^h (слънчево денонощие), а 23^h56^m (звездно денонощие). В случая, когато $w = v$, за самолета, летящ на изток, получаваме:

$$T_E^* = 23^h56^m / 2 = 11^h.97 \text{ (звездно денонощие за самолета)}$$

Ако T_E е периодът на смяна на деня и нощта (слънчево денонощие за самолета), то:

$$1/T_E = 1/T_E^* - 1/T_{\oplus}$$

където $T_{\oplus} = 1$ година.

$$T_E = T_E^* T_{\oplus} (T_{\oplus} - T_E^*) \approx 11^h59^m$$

За самолета, летящ на запад: $T_W^* = \infty$.

$$1/T_W = 1/T_W^* - 1/T_{\oplus}$$

$$T_W = -T_{\oplus}$$

За този самолет смяната на деня и нощта ще бъде през 1 година, като Слънцето ще се движи от запад на изток.

З случая, когато $w = 2v$, за самолета, летящ на изток:

$$T_E^* = 23^h56^m / 3 = 7^h.97$$

и получаваме по аналогичен начин:

$$T_E \approx 7^h59^m$$

За самолета, летящ на запад:

$$T_W^* = -23^h56^m$$

$$T_W = T_W^* T_{\oplus} (T_{\oplus} - T_W^*) = -23^h52^m$$

Знакът минус отново означава, че Слънцето ще се движи видимо от запад на изток.

Задача 3. Цяла нощ ловецът е вървял по посока към Полярната звезда, т.е. на север. Следователно, за да се върне обратно, той трябва да върви на юг. От 23^h до 5^h са изминали 6 часа и за обратния път на ловеца ще са му нужни също 6 часа. Той тръгва в 6^h и ще стигне до изходния пункт в 12^h . Периодът от време е краят на март, което е близо до пролетното равноденствие. Тогава действително Слънцето изгрява около 6^h местно време, и то почти точно от изток на хоризонта. Следователно в началния момент ловецът трябва да тръгне в посока 90° надясно от посоката към изгряващото Слънце, а в самия край на своя преход (12^h) да се движи по посока към Слънцето (пладне). С течение на времето между началния и крайния момент на прехода ъгълът между посоката към Слънцето и посоката на движение на ловеца трябва постепенно да се променя от 90° до 0° . Вижда се, че на всеки час ъгълът трябва да намалява с 15° . Ловецът може да определя този ъгъл, като използва скалата на компаса с изгубената стрелка и часовника за отчитане на моментите от време. За съжаление, понеже часовникът му не е със стрелки, той не може да му послужи за пряко определяне на посоката юг по познатия начин с помощта на Слънцето. Колкото по-често ловецът извършва корекция на посоката си на движение, толкова по-точно ще се насочва към изходния пункт, откъдето е тръгнал.

Задача 4. По пладне, т.е. в горна кулминация, Слънцето се намира на най-голяма височина над хоризонта:

а) в деня на лятното слънцестояние (около 22 юни в северното полукуълбо) за точките с географска ширина от $23^\circ.5$ (северна тропична окръжност) до 90° (северен полюс и симетрично разположените точки в южното полукуълбо, където лятното слънцестояние е около 23 декември);

б) в дните на пролетното и есенното равноденствие в точките от екватора (22 март, 23 септември);

в) в две междинни дати – една между пролетното равноденствие и лятното слънцестояние и друга, симетрична на първата, между лятното слънцестояние и есенното равноденствие – за точките с географска ширина от 0° до $23^\circ.5$ от двете полукълба на Земята.

Слънцето е най-ниско над хоризонта по пладне:

а) в деня на зимното слънцестояние за всички точки без екватора – за северното полукълбо на 23 декември, а за южното на 22 юни. За точките с географска ширина от $66^\circ.5$ до 90° (над полярните окръжности) тогава Слънцето е най-ниско под хоризонта;

б) на самия екватор Слънцето има минимална височина над хоризонта два пъти в годината – на двете дати на слънцестоене.

Задача 5. През месеца, в който сме родени, съзвездието, отговарящо на нашата зодия, ще се вижда трудно или изобщо няма да се вижда, защото самото Слънце ще се намира близо до това съзвездие или в него.

Астролозите са разделили еклиптиката – видимия годишен път на Слънцето на фона на звездите – на 12 равни части по 30° . Те се наричат зодиакални знаци. Слънцето навлиза в границите на един зодиакален знак около 22-ата дата на даден месец и го напуска около 22-ата дата на следващия месец. Границите на зодиакалните знаци не съвпадат с границите на зодиакалните съзвездия, чиито имена носят. Използваната от днешните астролози система на зодиакални знаци датира от преди около 2000 години. Оттогава досега, поради прецесията, зодиакалните знаци, в които е Слънцето в определените периоди от годината, са се изместили с около един цял знак на запад от съответните зодиакални съзвездия. Следователно, когато Слънцето е примерно в зодиакалния знак Овен, то не е в съзвездието Овен, а в съседното на запад от него съзвездие Риби. Ето защо, ако сме родени между 22 март и 22 април и сме зодия Овен, то през периода, в който сме родени, съзвездието Овен ще е на изток от Слънцето. То ще се вижда само вечер, малко след залеза на Слънцето, на западния хоризонт. Колкото по-близо до края на този период сме родени, толкова по-близо ще е Слънцето до съзвездието Овен и толкова по-трудно ще се вижда това съзвездие.

Друг фактор, влияещ върху видимостта на зодиакалните съзвездия в съответните периоди от годината, е произволният начин, по който са очертани техните граници. Участъците от еклиптиката, попадащи в границите на различните зодиакални съзвездия, далеч не са равни, а и съзвездията заемат много различни площи от небесната сфера.

УЧЕНИЦИ IX ÷ X КЛАС

Задача 2. При $w = v/2$ самолетът, летящ на изток, ще има скорост $u_E = 3v/2$ и $T_E = 24^h \times 2/3 = 16^h$. Самолетът, който лети на запад, ще има скорост $u_W = v/2$ и за него $T_W = 2 \times 24^h = 48^h$.

При отчитане на разликата между звездното и слънчевото денонощие, за летящия на изток самолет получаваме:

$$T_E^* = 23^h56^m \times 2/3 = 15^h.96$$
$$T_E = T_E^* T_\oplus (T_\oplus - T_E^*) \approx 15^h17^m$$

За летящия на запад самолет:

$$T_W^* = 23^h56^m \times 2 = 47^h.87$$
$$T_W \approx 48^h22^m$$

Задача 4. Щом при противостоянието Марс е бил в съзвездието Дева, то Слънцето се е намирало в диаметрално противоположния участък от еклиптиката, най-вероятно в съзвездието Риби. Слънцето е в зодиакалния знак Риби в края на февруари и по-голямата част на март. Този участък от кръга на зодиакалните знаци е изместен на запад от съзвездието Риби поради прецесията. Следователно Слънцето трябва да е в съзвездието Риби в края на март и по-голямата част от април. Точно не може да се каже, без да се използва звездна карта, понеже

границите на зодиакалните съзвездия не са прекарани през равни части от еклиптиката, но сезонът във всеки случай е пролет.

Задача 5. Да означим с r_B , r_3 и r_M съответно разстоянията от Слънцето до Венера, Земята и Марс, а с D_M и D_L – линейните диаметри на Марс и Луната.

$$\delta_M = D_M / (r_M - r_3) = (6794 \text{ km} / (0.52 \times 150 \times 10^6 \text{ km})) \times (180^\circ \times 3600'' / \pi) \approx 17''.98$$

$$\delta_L = D_L / (r_3 - r_B) = (3476 \text{ km} / (0.28 \times 150 \times 10^6 \text{ km})) \times (180^\circ \times 3600'' / \pi) \approx 17''.08$$

Оказва се, че действително $\delta_M \approx \delta_L$.

Количеството слънчева светлина E_L , което попада на единица площ от повърхността на Луната, се определя от разстоянието до Слънцето:

$$E_L \sim 1 / r_3^2$$

Общото количество светлина W_L , отразено от Луната, е:

$$W_L \sim A_L D_L^2 / r_3^2$$

където A_L е отражателната способност на лунната повърхност. Аналогично за общото количество светлина, отразено от Марс, можем да напишем:

$$W_M \sim A_M D_M^2 / r_M^2$$

където A_M е отражателната способност на марсианската повърхност. Повърхностните яркости на видимите им дискове, съответно I_M и I_L , ще са пропорционални на W_M и W_L и обратно пропорционални на разстоянията на наблюдателя до тях. Следователно:

$$\begin{aligned} I_M / I_L &= (A_M / A_L) (D_M^2 / r_M^2) (r_3^2 / D_L^2) ((r_3 - r_B)^2 / (r_M - r_3)^2) = \\ &= (A_M / A_L) (r_3^2 / r_M^2) (D_M / (r_M - r_3))^2 / (D_L / (r_3 - r_B))^2 = \\ &= (A_M / A_L) (r_3^2 / r_M^2) (\delta_M^2 / \delta_L^2) \end{aligned}$$

Тъй като ъглите δ_M и δ_L , под които се виждат двете тела, са равни, то :

$$I_M / I_L = (A_M / A_L) (r_3^2 / r_M^2)$$

(Виждаме, че отношението на повърхностните яркости зависи само от албедото и разстоянието на планетите до Слънцето.)

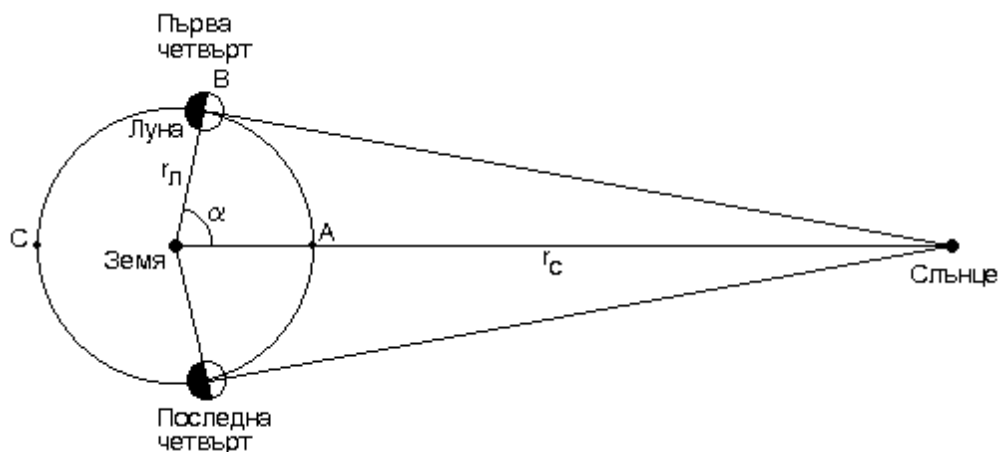
Понеже по условие $A_M = A_L$, то:

$$I_M / I_L = r_3^2 / r_M^2 \approx 0.43$$

Очевидно $I_L > I_M$ и Луната за наблюдател на Венера ще бъде по-ярка, отколкото Марс за земния наблюдател.

УЧЕНИЦИ XI ÷ XII КЛАС

Задача 2. Луната е в първа или последна четвърт, когато ъгълът между направленията Луна-Земя и Луна-Слънце е 90° (когато, както пише Аристарх Самоски, "Луната ни се явява отсечена наполовина"). Поради това, че Слънцето не е на безкрайно голямо разстояние, в моментите, когато Луната е в първа или последна четвърт, ъгълът между направленията Земя-Луна и Земя-Слънце не е прав.



От момента, когато Луна е в първа четвърт, до последна четвърт Луната описва дъга от своята орбита, по-голяма от 180° , при предположение, че орбитата ѝ е кръгова. Затова $T_1 > T_2$. Нека r_c е разстоянието от Земята до Слънцето, а r_l – от Луната до Земята. Луната изминава дъгата от своята орбита АВ за време $T_2 / 2$, а дъгата ВС – за време $T_1 / 2$. Както се вижда от чертежа:

$$\alpha / (180^\circ - \alpha) = (T_2 / 2) / (T_1 / 2)$$

Оттук намираме:

$$\alpha = 180^\circ T_2 / (T_1 + T_2) = \pi T_2 / (T_1 + T_2)$$

Търсеното съотношение е:

$$r_c / r_l = 1 / \cos \alpha$$

$$r_c / r_l = 1 / \cos (\pi T_2 / (T_1 + T_2))$$

Задача 4. Ако приемем, че всяка звезда излъчва като абсолютно черно тяло, то за светимостта на звездата е в сила следното съотношение:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

където R е радиусът на звездата, T е температурата ѝ, а σ е константата на Стефан-Болцман. Това съотношение е било известно на астрономите преди да могат пряко да се измерват радиусите на звездите. Всъщност радиусите на повечето от тях не могат пряко да се измерват и до днес.

От диаграмата на Херцшпрунг-Ръсел се вижда, че звездите, наречени гиганти, имат относително по-висока светимост в сравнение със звездите от главната последователност със същата температура. Горната формула показва, че те трябва да имат много големи размери, за да е изпълнено това. Аналогични разсъждения обясняват малките размери на белите джуджета – те имат високи температури, а ниска светимост.